

## **TRABAJO DE FIN DE GRADO EN**

**Maestro en Educación Primaria**

### **PORTADA**

**ESCUELA UNIVERSITARIA DE EDUCACIÓN Y TURISMO DE  
ÁVILA**

**RESOLUCIÓN E INVENCION DE PROBLEMAS EN EDUCACIÓN  
PRIMARIA  
PROBLEM SOLVING AND PROBLEM POSING IN PRIMARY  
EDUCATION**

**AUTOR: Natalia Pérez Muñoz  
Tutor: Marta Molina**

**Ávila, 13, Julio, 2021**

## TRABAJO DE FIN DE GRADO

### DECLARACIÓN DE AUTORÍA

*D./Dña. Natalia Pérez Muñoz, con DNI 70828363-R, matriculada en la*

*Titulación de Grado en Maestro de Educación Primaria*

***Declaro*** que he redactado el Trabajo Fin de Grado titulado Resolución e invención de problemas en educación primaria del curso académico 2020/2021 de forma autónoma, con la ayuda de las fuentes y la literatura citadas en la bibliografía, y que he identificado como tales todas las partes tomadas de las fuentes y de la literatura indicada, textualmente o conforme a su sentido.

En Ávila, a 13 de Julio de 2021



Fdo.: \_\_\_\_\_

## ÍNDICE

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN DEL TRABAJO DE FIN DE GRADO .....</b>                       | <b>2</b>  |
| <b>2. OBJETIVOS DEL TFG.....</b>   | <b>3</b>  |
| <b>3. METODOLOGÍA .....</b>  | <b>3</b>  |
| <b>4. DESARROLLO TEÓRICO .....</b>   | <b>3</b>  |
| <b>4. 1. DEFINICIÓN DE PROBLEMA.....</b>   | <b>4</b>  |
| <b>4. 2. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS .....</b>  | <b>6</b>  |
| <b>4. 3. INVENCIÓN DE PROBLEMAS.....</b>   | <b>7</b>  |
| <b>4. 4. LA RESOLUCIÓN E INVENCIÓN DE PROBLEMAS EN EL CURRÍCULO DE EDUCACIÓN PRIMARIA.....</b> | <b>8</b>  |
| <b>4. 5. TIPOS DE PROBLEMAS .....</b>  | <b>10</b> |
| <b>4. 6. MODELOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS .....</b>  | <b>15</b> |
| <b>4. 7. ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS .....</b>                                      | <b>19</b> |
| <b>4. 8. FORMAS DE PROPONER LA INVENCIÓN DE PROBLEMAS .....</b>                                | <b>20</b> |
| <b>4. 9. APORTES DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS .....</b>                                       | <b>22</b> |
| <b>4. 10. ASPECTOS POSITIVOS DE LA INVENCIÓN DE PROBLEMAS.....</b>                             | <b>23</b> |
| <b>4. 11. EXPERIENCIAS DE INVENCIÓN DE PROBLEMAS EN EL AULA</b>                                | <b>25</b> |
| <b>4. 12. EXPERIENCIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL AULA .....</b>                         | <b>27</b> |
| <b>4. 13. DIFICULTADES DE LA RESOLUCIÓN E INVENCIÓN DE PROBLEMAS .....</b>                     | <b>31</b> |
| <b>5. CONCLUSIONES .....</b>   | <b>32</b> |

**6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....35**

## RESUMEN

En este trabajo se presenta una investigación de tipo teórico sobre la resolución e invención de problemas en Educación Primaria. El principal objetivo es analizar las particularidades de la resolución e invención de problemas con el fin de integrar ambas tareas en la práctica en el aula.

Se ha hecho un cuidado análisis de una amplia muestra de documentos que abordan este tema desde el área de Didáctica de la Matemática. Como resultado, en primer lugar se concreta la definición de problema y los procesos de resolución e invención de problemas. Seguidamente se atiende al tratamiento de ambas temáticas en el currículo de Educación Primaria, los tipos de problemas que se distinguen en la literatura, los modelos y estrategias que se proponen para formular o conocer la solución de un problema, el interés de ambos procesos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la citada etapa, algunas experiencias destacadas que informan de las capacidades que evidencian los alumnos al abordar ambas tareas y las principales dificultades que surgen en este proceso. Concluimos el trabajo con una reflexión personal y conclusiones.

Palabras claves: resolución de problemas, invención de problemas, competencia matemática, Educación Primaria.

**Palabras Clave:** Problema, resolución, invención, Educación Primaria

## 1. INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN DEL TRABAJO DE FIN DE GRADO

En el presente Trabajo de Fin de Grado se sintetizan diferentes documentos sobre la resolución e invención de problemas matemáticos en la etapa de Educación Primaria, realizados por autores especialistas en educación matemática. La resolución e invención de problemas se consideran fundamentales ya que constituyen una de las vías más importantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Uno de los motivos por los cuales se ha elegido esta temática es debido a la dificultad observada, en los niños de esta etapa, a la hora de resolver o inventar problemas. Esta es una de las causas por la cual los alumnos llegan a considerar esta materia como difícil o aburrida. Además, se considera que los alumnos poseen una mala y baja base sobre estos aspectos, lo que conlleva dificultades para comprender, resolver o inventar un problema.

En la Ley Orgánica 3/2020 del 29 de diciembre que modifica la Ley Orgánica 2/2006 del 3 de mayo de Educación, se puede observar que la tarea de la resolución de problemas está muy presente en currículo del área de matemáticas. Es un eje central, pues permite a los alumnos enfrentarse a situaciones complejas utilizando las herramientas adquiridas. Además, como queda recogido en los criterios de evaluación, se está empezando a introducir tareas de invención de problemas en los diferentes niveles... Desarrollar una buena capacidad para resolver e inventar problemas permite que los alumnos alcancen una buena competencia matemática.

Ante esto, se ha considerado indispensable analizar, en primer lugar, qué es un problema y sus tipos, centrándose en los problemas aritméticos. A partir de estos, se analizan diferentes modelos que describen las etapas y estrategias que siguen los alumnos de estas edades para inventar y resolver problemas. Para profundizar, se sintetizan experiencias, tanto de invención como de resolución, que han sido desarrolladas en aulas de Educación Primaria. De ellas, se derivan pautas que siguen los alumnos para formular o conocer la solución de los problemas que se les presenten. Además, se hace referencia a las dificultades que encuentran los alumnos a la hora de enfrentarse a diferentes problemas y los aportes de ambas tareas en relación con el proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.

## **2. OBJETIVOS DEL TFG**

Con la realización de este trabajo se pretende conseguir los siguientes objetivos a partir de un objetivo principal, que es el que se expone a continuación:

Analizar las particularidades de la resolución e invención de problemas matemáticos para informar su puesta en práctica en el aula.

A partir del objetivo principal se han planteado los siguientes objetivos específicos:

- Reconocer diferentes tipos de problemas y estrategias para su resolución e invención.
- Identificar los métodos de resolución e invención de problemas más utilizados.
- Descubrir estrategias utilizadas por los alumnos en diferentes experiencias reportadas en la literatura científica del área de Educación Matemática.
- Describir beneficios y aportes de la invención y resolución de problemas.
- Identificar dificultades que encuentran los alumnos ante estas tareas.

## **3. METODOLOGÍA**

La revisión teórica se ha realizado a partir de la consulta de autores especialistas en resolución e invención de problemas matemáticos. Se han consultado diferentes libros y manuales los cuales tratan la resolución e invención de problemas, entre ellos la bibliografía base que se trabaja en las asignaturas de educación matemática del Grado de Educación Primaria.

Además, se han consultado otras fuentes como artículos en revistas educativas, congresos educativos, trabajos de fin de grado y tesis doctorales recogidos en plataformas como Dialnet y repositorio Funes, de la Universidad de Los Andes, especializado en Educación Matemática. Se ha de señalar que mucha documentación se ha encontrado en inglés, en libros de la biblioteca o a través de google académico mediante la búsqueda de problema posing o problema solving, como aparecían demasiados documentos he recogido los datos más destacados de los mismos, teniendo en cuenta si me era sencillo traducirles o no

Para poder argumentar todas las ideas recogidas, se han extraído conclusiones de cada uno de los documentos revisados, dando lugar al contenido de este trabajo.

## **4. DESARROLLO TEÓRICO**

En este apartado se desarrolla la revisión teórica elaborada dividida en diferentes apartados.

#### **4. 1. DEFINICIÓN DE PROBLEMA.**

Para poder tener una idea clara de la definición de problema consultamos el diccionario de la Real Academia Española (en adelante, RAE) y documentos de diversos autores que han abordado este tema.

La RAE (2020) define problema como: “Conjunto de hechos o circunstancias que dificultan la consecución de algún fin”. Echenique (2006) define problema como: “situación que un individuo quiere o necesita resolver y para la que no dispone, en un principio de un camino rápido y directo que le lleve a la solución, por lo que se produce un bloqueo” (p.20). Esta definición se puede aplicar a problemas a nivel general y no solo a los matemáticos.

Centrándonos en la definición de problema matemático podemos observar que Vila y Callejo (2004) lo definen como:

una situación, planteada con finalidad educativa, que propone una cuestión matemática cuyo método de solución no es inmediatamente accesible al alumno o grupo de alumnos que intenta resolverla, porque no dispone de un algoritmo que relacione los datos y la incógnita o de un proceso que identifique automáticamente los datos con la conclusión, y por lo tanto deberá buscar e investigar para afrontar una situación nueva. (p.31)

Para Schoenfeld (1985) la dificultad de definir el término “problema” radica en que es relativo: un problema no es inherente a una tarea matemática, más bien es una relación particular entre el individuo y la tarea. Utiliza la palabra problema para referirse a una tarea que resulta difícil para el individuo que está tratando de resolverla.

Problema es una situación que conlleva ciertas cuestiones abiertas que desafían intelectualmente a alguien que no posee inmediatamente métodos, procedimientos o algoritmos directos y suficientes para responder (Blum y Niss, 1991).

Un problema puede verse como una terna situación-alumno-entorno; el problema aparece cuando el alumno percibe una dificultad, teniendo en cuenta que lo que es un problema para un alumno no lo es para otro (Charnay, 1994).

Habiendo consultado estas definiciones de distintos autores, observamos que todos coinciden en que un problema es una tarea o situación que se le presenta a un sujeto,



la cual le supone un desafío al no disponer de un método para su resolución. Los autores destacan el carácter subjetivo de esta noción: lo que para algunos puede ser un problema, para otros puede ser un mero ejercicio.

Los ejercicios no implican una actividad intensa de pensamiento para su resolución. Cuando el alumno los realiza, se da cuenta de que no requiere gran esfuerzo. Estos normalmente tienen una única solución y son de entrenamiento o de aplicación de contenidos aprendidos o memorizados sirviéndole al profesor para comprobar que han adquirido los conocimientos trabajados (Echenique, 2006). Si son adecuadamente seleccionados estos permiten evaluar el grado de comprensión de los conceptos y la adquisición de algoritmos matemáticos.

Al contrario pasa con los problemas, pues estos no se resuelven con la aplicación de una regla o receta conocida a priori, si no que exigen al niño sumergirse en su interior para navegar entre los conocimientos matemáticos que posee y ponerlos en práctica.

Los problemas pueden tener una o varias soluciones y diferentes maneras de llegar a dicha solución. Cuando un alumno se implica en esta actividad, se vuelca en ella, muestra entusiasmo y desarrolla su creatividad personal. Es frecuente manifestar cierto nivel de satisfacción al descubrir el camino que le conduce al resultado final como fruto de la investigación llevada a cabo. El tiempo que se dedica a la resolución de un problema es bastante mayor que el que lleva la realización de un ejercicio (Echenique, 2006).

Para tener una visión rápida de las diferencias que podemos observar entre ejercicio y problema recogemos la tabla 1 elaborada por Echenique (2006).

**Tabla 1.**

*Diferencia entre ejercicio y problema*

| Características de los ejercicios                    | Características de los problemas   |
|--|--|
| Se ve claramente qué hay que hacer.                  | Suponen un reto.   |
| La finalidad es la aplicación mecánica de Algoritmos | La finalidad es ahondar en los conocimientos y experiencias que se poseen, para rescatar aquellos que son útiles para llegar a la solución esperada. |
| Se resuelven en un tiempo relativamente corto.       | Requieren más tiempo para su resolución.   |

---

|  |  |
|--|--|
| No se establecen lazos especiales entre el ejercicio y la persona que lo resuelve. | La persona que se implica en la resolución lo hace emocionalmente. El bloqueo inicial, debido a que la situación le desconcierta, dará paso a la voluntariedad y perseverancia por encontrar la solución y, por último, al grado de satisfacción una vez que esta se ha conseguido |
| Generalmente tienen una sola solución.   | Pueden tener una o más soluciones y las vías para llegar a ellas pueden ser variadas.  |
| Son muy numerosos en los libros de texto.  | Suelen ser escasos en los libros de texto.   |

---

#### 4. 2. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resolver problemas es una cuestión de habilidad práctica, esta se adquiere mediante la imitación y la práctica. Al tratar de resolver problemas hay que observar e imitar lo que otras personas hacen en casos semejantes, y así aprendemos problemas ejercitándolos al resolverlos (Polya, 1965, p. 27).

Ruiz y García (2003) conciben la resolución de problemas como “generadora de un proceso a través del cual quien aprende combina elementos del conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar solución a una situación nueva” (p. 325).

Según Calvo (2008), “Los alumnos deben construir conceptos matemáticos a partir de la resolución de problemas, ya que esta habilidad les permite hallar la relación entre la matemática y su vida” (p. 132).

Se identifican tres vías diferentes de incorporar la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. Según Castro y Ruiz (2015) estas son:

- Enseñar para la resolución de problemas. En este caso la idea es primero explicar los conceptos y luego proponer situaciones problemáticas que pretendan poner en práctica lo aprendido. El niño resuelve situaciones utilizando en diferentes contextos lo aprendido previamente.
- Enseñar sobre la resolución de problemas. Se refiere a la enseñanza de estrategias o heurísticos que permitan resolver problemas; es enseñar a

resolver problemas y no necesariamente los contenidos matemáticos curriculares. En esta vía es cuando se pone en marcha las cuatro fases de Polya que se verán en el siguiente apartado. A través de una serie de interrogantes el maestro ayudará a los alumnos a resolver los problemas.

- Por último, enseñar mediante la resolución de problemas es enseñar los contenidos matemáticos a través de la actividad de resolver problemas; esto significa que el profesor propone una situación problemática y, en el proceso de resolución, se van desarrollando los contenidos pertinentes (Alfaro, 2008)

Estas tres vías de resolución se pueden utilizar de manera independiente, aunque se pueden superponer.

Vila y Callejo (2004) explican que para crear un ambiente de aprendizaje basado en la resolución de problemas matemáticos es necesario que los maestros posean unas determinadas actitudes y creencias que estimulen la curiosidad intelectual, inciten el trabajo en grupo entre los alumnos y favorezca la argumentación.

Calvo (2008) reconoce que los problemas deben conformar un reto para el alumno y deben ser adecuados al nivel de formación. No se puede pretender que todos resuelvan los mismos problemas, se tiene que tener en cuenta que dentro de una misma clase existen estudiantes con distintas capacidades cognitivas.

#### **4. 3. INVENCION DE PROBLEMAS**

Se considera conveniente que los escolares sean capaces de redactar, compartir y resolver sus propios problemas. La actividad de inventar problemas se puede llevar a cabo antes, durante y después de resolver un problema dado.

Este tipo de tarea ha sido designada de diferentes maneras según los autores que han tratado este asunto. Castro en su artículo “La invención de problemas y sus ámbitos de investigación” recoge los términos empleados por varios autores: Kilpatrick (1987) lo designa como formulación de problemas, Brown y Walter (1990) hacen referencia al planteamiento de problemas y Silver (1994) habla de generación de problemas.

En este trabajo se adopta la expresión inventar, utilizando de forma sinónima las expresiones de formular, plantear, proponer.

Estos términos tienen significados próximos, pero no equivalentes, pues Inventar según Moliner (1986) es descubrir nuevas formas de hacer una cosa que antes era desconocida o hacer algo de manera. De la misma manera Formular es “dar forma a algo

valiéndose del lenguaje hablado o escrito”, la acción de Plantear según la RAE es suscitar, exponer un problema matemático, un tema, una dificultad o una duda, asimismo el significado de proponer según la RAE significa hacer una propuesta.

“Cuando un individuo inventa un problema, ha alcanzado niveles de reflexión complejos, por lo tanto, ha llegado a una etapa de razonamiento que hace posible la construcción de conocimiento matemático” (Castro, 2011, p.1)

Flores y Rico (2015) muestran que una idea central en la invención o planteamiento de problemas es la concepción de que el aprendizaje lo realiza el escolar de un modo socializado e interactivo implicado en un proyecto de creación de conocimiento.

Esta tarea de invención de problemas puede hacerse mediante la modificación de enunciados ya dados que les resulten más familiares. “La invención de problemas es una actividad consustancial con la resolución de problemas, que aparece recogida en algunas de las propuestas de fases o etapas que se han dado para la resolución de problemas” (Castro, 1991, p. 39).

Moses et al. (1993) señalan que para generar problemas a partir de uno dado el alumnado ha de distinguir los elementos por los que está compuesto, como son, la información conocida, la información desconocida y los proceso a seguir para relacionar ambas informaciones.

Una vez que los estudiantes se han familiarizado con las técnicas de reformulación de problemas, se les puede proponer actividades de invención más complejas en las que los alumnos deben escribir sus propios problemas. Como es el ejemplo de inventar problemas partiendo de ciertas restricciones, las cuales se proponen antes de proceder a la invención del problema (ej., pidiéndoles que solo se resuelva con una operación o teniendo en cuenta un diagrama dado) (Flores, P. y Rico, L.,2015).

#### **4. 4. LA RESOLUCIÓN E INVENCION DE PROBLEMAS EN EL CURRÍCULO DE EDUCACIÓN PRIMARIA.**

En este apartado se muestra la importancia que tiene la resolución e invención de problemas dentro del currículo de matemáticas en la etapa de educación primaria. Para ello nos basaremos en la normativa estatal, la Ley Orgánica 2/2006 del 3 de mayo que a su vez ha sido modificada por la Ley Orgánica 3/2020 de 29 de diciembre. Además, consideramos el REAL DECRETO 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el

currículo básico de Educación Primaria y el Decreto 26/2016, de 21 de julio, por el que se establece el currículo y se regula la implicación, evolución y desarrollo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León.

La Ley Orgánica 2/2006 en texto consolidado con la LOMLOE señala que uno de los objetivos de la educación primaria recogido en el artículo 17 es: “Desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana” (p.24).

En cuanto al Real Decreto 126/2014, en la introducción hace referencia a que el currículo de esta etapa estará integrado por objetivos y competencias para aplicar la realización adecuada de actividades y la resolución de problemas complejos. Este Real Decreto expone que el papel del maestro es esencial para plantear tareas o situaciones de aprendizaje que permitan la resolución de problemas por parte de los estudiantes. Además, destaca la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología muy ligadas a la resolución de problemas.

Como maestros se deben planificar actividades de aprendizaje integradas que permitan a los alumnos avanzar en una misma competencia al mismo tiempo, potenciando su desarrollo.

Siguiendo las aportaciones de Carrillo et al, (2016), la competencia matemática hace referencia a tres aspectos: realización de tareas, uso de recursos y contexto. Esta competencia hace referencia a la capacidad de realizar actividades implicando procesos como comprensión, interpretación, cuantificación y análisis. Para ello es necesario utilizar recursos o conocimientos matemáticos en contextos cotidianos. La competencia matemática contribuye al desarrollo del resto de competencias.

Otra pauta es que los centros de educación primaria deben realizar una evaluación individualizada a cada alumno, al finalizar la etapa de tercero de primaria, para comprobar el grado de destrezas de cálculo y resolución de problemas en relación con la competencia matemática, entre otras.

Dentro de las asignaturas troncales expuestas en este Real Decreto se destacan las matemáticas. En esta asignatura se expone que uno de los ejes principales de las matemáticas son los procesos de resolución de problemas. En dicha resolución se

requieren y se utilizan diferentes capacidades básicas. Además, los objetivos generales de esta área van dirigidos a iniciarse en la resolución de problemas.

Por último, señalar que la resolución de problemas queda recogida en gran parte de los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables reflejados en este Real Decreto sirviéndonos como base para planificar nuestras actividades en el aula. Sin embargo, la invención de problemas no está recogida en ningún elemento curricular.

Por otro lado, haciendo referencia al Decreto en el análisis realizado se ha podido observar que sí menciona la invención de problemas a diferencia del real decreto, concretamente en los diferentes bloques dentro de la asignatura de Matemáticas, recogido en los estándares de aprendizaje evaluables. Estos son (BOE 142, p. 34425 y 34435):

- Inventa problemas cuya resolución requiera plantear una operación del tipo: suma, resta, multiplicación y división.
- Inventa problemas cuya resolución requiera plantear hasta dos operaciones del tipo: suma, resta, multiplicación y división.

Además, en este Decreto, la resolución de problemas aparece recogida en múltiples ocasiones, siendo un eje principal de la actividad matemática. Tal es así que la encontramos recogida en la introducción de diferentes asignaturas, contenidos, criterios de evaluación, estándares de aprendizajes evaluables, orientaciones metodológicas, en bloques dentro de la asignatura de matemáticas...

De todo ello cabe concluir que hay mayor preocupación por la resolución de problemas, que por la invención. Esto podría estar ligado a la escasez de trabajos de investigación sobre la invención, pero esto no justifica la escasa presencia en el currículo. Se considera necesario avanzar en la investigación para que haya una igualdad entre la resolución y la invención ya que estas se complementan. También se considera importante incrementar la presencia de la invención de problemas en el currículo dados los beneficios y potencialidades que se le reconocen a esta tarea, algunos de los cuales comentaremos en un apartado posterior.

#### **4. 5. TIPOS DE PROBLEMAS**

Existen gran variedad de clasificaciones de los problemas según la visión de diversos autores, cada uno desde su perspectiva. Algunas de estas clasificaciones son

según las operaciones que se llevan a cabo para resolver el problema, según el número de soluciones, según los contenidos o procesos matemáticos implicados ...

En este caso nos vamos a centrar en dos tipos de problemas que se dan en el primer y segundo ciclo de Educación Primaria, dichos problemas son de Aritmética. Dentro de los problemas aritméticos encontramos los problemas aditivos y los problemas multiplicativos.

Los principales problemas que se trabajan en la escuela son los que tienen nociones ligadas a la estructura aditiva. Estos se introducen en el currículo a través de su empleo en situaciones familiares, en las cuales se realizan acciones manipulativas como juntar, separar, añadir, quitar (Flores y Rico, 2015). Para poder tener una visión más clara de ellos, seguiremos la clasificación semántica recogida por diversos autores, entre ellos Segovia y Rico (2011). Estos autores distinguen en cuatro tipos: problemas de cambio, problemas de combinación, problemas de comparación y problemas de igualación.

- Problemas de cambio: estos se identifican debido a su enunciado en el cual se incluye una secuencia temporal, se parte de la cantidad inicial y esta se modifica obteniéndose una cantidad final. Aparecen tres cantidades, dos de ellas son datos y la restante es la incógnita que se debe de averiguar mediante una suma o una resta. Según cuál sea la cantidad que se desconoce y si el problema es de aumento o disminución se distinguen un total de 6 problemas de cambio diferentes. Ver ejemplo en imagen 1.

### Imagen 1

*Ejemplo de problema de cambio.*



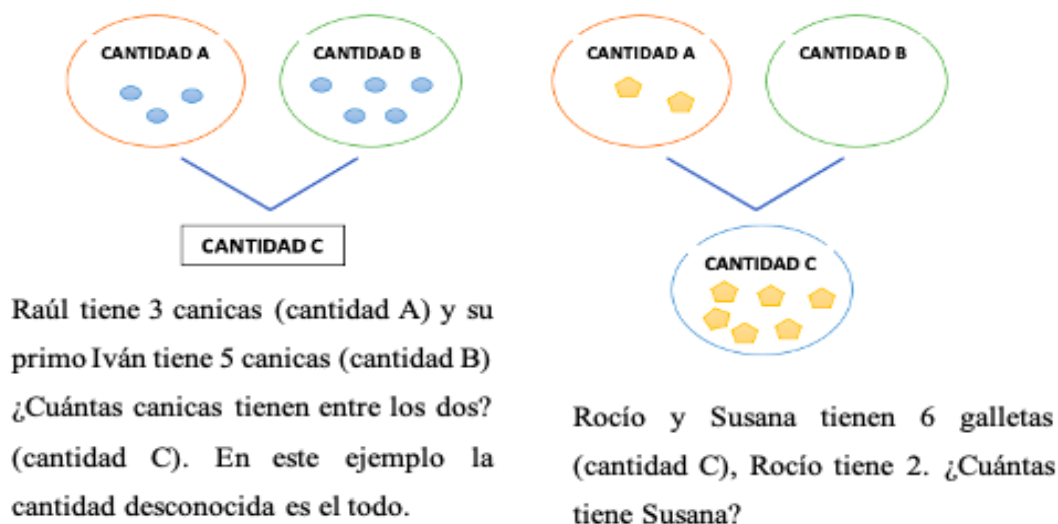
- Problemas de combinación, los cuales pueden ser de dos tipos, dependiendo de si la cantidad desconocida es el todo o una de las partes. Según Flores y Rico (2015) “hay dos cantidades estáticas (A y B) que forman parte de un todo que las incluye y lo conforman en su totalidad” (p.86). Ponen en juego una



concepción binaria de las operaciones, en estos no existe una acción física que transforme una cantidad. Ver un ejemplo en la imagen 2.

## Imagen 2

*Ejemplo de problemas de combinación*



- Problemas de comparación, en ellos se comparan dos cantidades de forma aditiva. Dichas comparaciones pueden ser de superioridad/aumento (más que...) o de inferioridad/disminución (menos que...). En el enunciado estos problemas aportan información sobre la cantidad de referencia, la comparada o la diferencia entre ambas. Teniendo en cuenta esto según se desconozca una de las tres cantidades y si la comparación es de superioridad o inferioridad, da lugar a seis posibles problemas. Los siguientes son ejemplos de problemas de comparación aumento:
  - Elisa tiene 12 canicas y Laura 8. ¿Cuántas canicas tiene Elisa más que Laura?
  - Álvaro tiene 10 cromos y Sergio 7 más que Álvaro. ¿Cuántos cromos tiene Sergio?
  - Lucas tiene 6 magdalenas, 4 más que Carla. ¿Cuántas magdalenas tiene Carla?

Los siguientes son ejemplos de problemas de comparación de disminución:

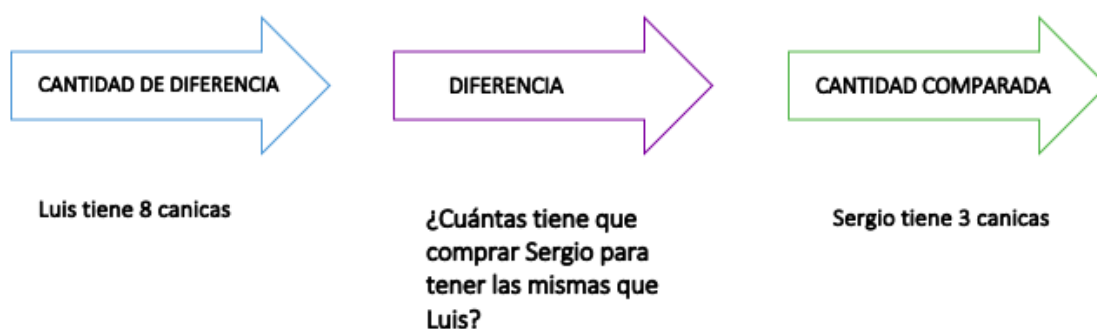
- Sara tiene 10 cromos, 7 menos que Sofía ¿Cuántos tiene Sofía?



- Julia tiene 10 galletas y Javier 6. ¿Cuántas galletas tiene Javier menos que Julia?
- Álvaro tiene 8 gominolas, Carlos 3 menos que Álvaro ¿Cuántas tiene Carlos?
- Problemas de igualación. Estos en su enunciado incluyen un comparativo de igualdad (tantos como, igual que...); se dan dos cantidades y a través de una acción se igualan modificándolas, creciendo o disminuyendo la cantidad. Demandan una transformación de una cantidad en otra, adoptando carácter dinámico. Pueden ser confundidos con los de comparación ya que se inscriben dentro de un mismo esquema.

### Imagen 3

*Ejemplo de problema de igualación.*



Por otro lado, se encuentran los problemas de estructura multiplicativa, a través de los cuales se pretende que los escolares interpreten situaciones de reiteración de un mismo número. Estas operaciones se llevarán a cabo mediante sumas repetidas o disposiciones en cuadrícula, acompañadas de estrategias de cálculo mental (Flores y Rico, 2015).

Los niños necesitan un buen dominio de la estructura aditiva y de su comprensión para posteriormente adquirir un aprendizaje de la multiplicación.

Los niños desarrollan desde edades tempranas esquemas multiplicativos, mediante la constitución de unidades compuestas y la acción de reiterar, que les lleva a contar progresivamente de uno en uno, de dos en dos o de tres en tres y a realizar repartos equitativos. Por tanto, los esquemas multiplicativos surgen de la

modificación de los esquemas previos de contar y de la ampliación de las relaciones aditivas (Flores y Rico, 2015, p.219)

Los enunciados de dichos problemas contienen una relación ternaria entre tres cantidades. Puig y Cerdán (1988) llamaban a estas cantidades Intensivas (I) y Extensivas (E). Las cantidades extensivas expresan la extensión de una entidad y hacen referencia a un conjunto, son aditivas, puesto que los números pueden sumarse, manteniendo inalterada la unidad que los acompaña; por el contrario, las cantidades intensivas son unidades compuestas, formadas por el cociente de dos cantidades extensivas. Estas dos aparecen explícitas en el enunciado y se pide hallar una tercera para completar la relación.

Según Rico y Segovia (2011), teniendo en cuenta el significado de la relación ternaria descrita en el problema se identifican tres clases de problemas simples con estructura multiplicativa:

- Problemas de proporcionalidad simple: en ellos subyace una proporcionalidad entre dos magnitudes, estableciendo dos relaciones entre dos cantidades de cada una. Según la posición que ocupe la cantidad que se desconoce surgen tres tipos de problemas. Se pueden representar dos variantes sutiles de la proporcionalidad simple: grupos repetidos y tasa. Un ejemplo de estos problemas es el siguiente: Silvia tiene 5 ramos de flores, cada ramo tiene 8 flores ¿Cuántas flores hay en total?
- Problemas de comparación multiplicativa: en estos problemas se comparan dos cantidades de forma multiplicativa, una de ellas hace de referente y la otra de comparado o referido. Se comparan las cantidades para establecer el número de veces (denominado escalar) que es mayor una que la otra. La relación ternaria entre las tres cantidades se expresa mediante un esquema funcional (ver imagen 4), siendo  $r$  la cantidad referente,  $c$  la cantidad comparada y  $e$  el escalar. Al igual que ocurre con los problemas aditivos de comparación según cual sea la cantidad desconocida y si son de comparaciones de aumento o disminución se pueden dar seis problemas diferentes. Un ejemplo de estos problemas sería:
  - Problema de comparado desconocido: Carla tiene 3 bolígrafos, Natalia 4 veces más que Carla ¿Cuántos tiene Natalia?

-Problema de escalar desconocido: Sofía tiene 8 canicas, Candela tiene 23 canicas ¿Cuántas veces más canicas tiene Candela que Sofía?

-Problema de Referente desconocido: Luis tiene 5 veces más que Jesús, Si Luis tiene 25 flores ¿Cuántas flores tiene Jesús?

#### Imagen 4.

*Esquema funcional*

$$f : R \longrightarrow C$$

$$r \longrightarrow c = e \times r$$

Nota. Imagen tomada de *Matemáticas para maestros de educación primaria* (p.109) P, Flores. y L, Rico. 2015.

- Problemas de producto cartesiano: en estos problemas intervienen tres cantidades; E1, E2, y E3, de tal manera que para obtener el resultado de una de las tres cantidades hay que realizar una combinación entre las otras dos restantes. Dentro de este tipo de problemas se dan dos. Los problemas de combinación se basan en formar un conjunto de pares ordenados a partir de dos conjuntos de objetos discretos. Se pueden dar dos variantes, si el dato desconocido es el producto o si el dato desconocido es el factor. Por otro lado, los problemas de producto de medidas conllevan un producto cartesiano de dos magnitudes continuas, dando lugar a una tercera magnitud. Los siguientes son ejemplos de este tipo de problemas:
- Silvia tiene 8 faldas y 4 blusas que combinan entre sí ¿De cuántas formas las puede combinar para vestirse?
- Se requiere recubrir con un plástico una piscina rectangular que mide 4 m de largo y 3 m de ancho. ¿Qué superficie tendrá dicho plástico?

#### 4. 6. MODELOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Como bien dice Calvo (2008) “no existen recetas mágicas para dar solución a un problema, pero se pueden utilizar ciertos pasos que son esenciales para hacerlo” (p.134).

Son varios los autores que analizan métodos y estrategias desde distintas corrientes pedagógicas. Dichos estudios garantizan que la enseñanza de estrategias, pautas y técnicas favorece que los niños consigan mejores resultados que el mero hecho de ponerlos espontáneamente en práctica. La habilidad para la resolución de problemas no sólo se adquiere resolviendo numerosos problemas, sino también adquiriendo destrezas y familiarizándose con técnicas de resolución conocidas como heurísticas.

George Polya (1949) estableció cuatro etapas, que años después sirvieron de referencia para otros autores y fueron modificadas añadiendo nuevos matices. Estas cuatro son:

- En primer lugar, comprender el problema, refiriéndose al momento donde el estudiante debe comprender lo que se le pide, pues no se puede realizar algo que no se ha comprendido bien. Es necesario tener claridad acerca de lo que trata un problema antes de empezar a resolverlo.
- Una vez que el estudiante ha comprendido el problema debe pasar a la segunda etapa, es decir, debe pensar un plan de resolución o como lo llama Polya Concepción del plan. Se pueden considerar varias formas posibles de solución y seleccionar una específica. Entre estas dos fases el camino puede ser largo y difícil, dependiendo de los conocimientos y experiencias previas.
- En tercer lugar, la ejecución del plan, siendo esta el proceso donde el estudiante aplica el plan que ha concebido. Para ello hace falta que emplee los conocimientos ya adquiridos, poniendo a prueba las habilidades del pensamiento y la concentración.
- La cuarta etapa es examinar la solución obtenida, momento en el que el estudiante comprueba el plan que concibió, así como la solución y su resultado. Esta práctica retrospectiva le permitirá consolidar sus conocimientos e inclusive mejorar su comprensión de la solución a la cual llegó y detectar posibles errores en el proceso de resolución.

Años después Schoenfeld (1994) expone en su trabajo cuatro pasos para llevar a cabo la resolución de problemas, los cuales son: analizar y comprender el problema, diseñar y planificar una solución, explorar soluciones y verificar la solución.

Fernández (2006) tiene una perspectiva muy distinta de dichas fases, no solo comprende las fases para la realización del problema, sino que tiene en cuenta la actitud

del alumno y los procesos internos que tienen que darse en él para aprender a resolver problemas de carácter significativo, y también los procesos y actitudes que debe de tener dicho proceso para que lo alcance.

El autor indica que:

Más que conocer las fases que intervienen en la resolución de un problema, lo que necesita el estudiante son situaciones significativas que le aporten posibilidades de enfrentamiento a dicha resolución. Cuando a un estudiante se le propone un problema lo primero que hace es leerlo, pero leerlo significa seguir unas palabras que el cerebro descodifica para proyectar la idea de lo que éstas significan; más que leer lo que dice, intenta entender lo que pone. Esa intención provoca una fotografía mental que va a permitir que el estudiante enuncie el problema con sus palabras, en una formulación interior que establece una dinámica de relaciones en correspondencia con lo que ha entendido. (Fernández, 2006 p. 38)

Fernández (2006) presenta seis fases que tienen los profesores en cuenta a la hora de poner en práctica las estrategias: la primera de ellas la llama “querer” según la disposición del alumno ante la resolución del problema, marcará los pasos y objetivos a lograr. La segunda fase es de comprensión, trabajando con los modelos de problemas que el alumno necesite para su resolución. La tercera fase es la de formulación de ideas, en ella el alumno escoge las estrategias más idóneas para poner en práctica. La cuarta fase es la investigación, el alumno pone a prueba su memoria, su razonamiento y la reversibilidad de pensamiento. La quinta fase es la de comunicación, en ella se comparten las ideas entre el alumnado, facilitando su autonomía. La sexta y última fase es la de conclusiones, a las cuales se llega a través de las estrategias de resolución, recogiendo ideas de otros compañeros para poner en práctica.

García (2002) destacó la importancia del uso de estrategias para la enseñanza de la resolución de problemas por parte de los profesores, especificando varias pautas para afrontar con éxito la enseñanza de esta práctica en el aula. La primera de ellas consiste en proponer problemas desde diferentes contextos, planteando al estudiante distintas situaciones relacionadas con experiencias de la vida. La segunda se trata de considerar problemas con distinto número de soluciones siendo estas una, varias o sin solución. La tercera es plantear problemas en los que los datos estén incompletos o sobren datos haciendo al niño leer y entender el problema. La cuarta consiste en dar importancia a los

procesos de resolución y no sólo a las soluciones, por lo que se fija en el proceso del desarrollo y no en la solución. La quinta y última es que sean capaces de verbalizar el proceso para conseguir la solución.

Carrillo, J. et al. (2016) nos muestra en su libro algunas herramientas para abordar con éxito la resolución de problemas asociadas a cinco fases en el proceso de resolución inspiradas en la propuesta de Polya.

Estas muestras están recogidas en Carrillo, J. et al. (2016), ver la tabla 2.

**Tabla 2**

*Preguntas que hacerse el resolutor en cada una de las fases*

| Fases de la resolución de problemas                           | Preguntas que plantearse   |
|---|--|
| Fase de comprensión y análisis del problema                   | ¿Entiendo el enunciado? ¿Entiendo qué se me pide? ¿Soy capaz de determinar todos los datos? ¿Qué no es útil del enunciado?   |
| Fase de planificación y búsqueda de estrategias de resolución | ¿Cómo relaciono los datos? ¿Qué he de saber para resolver el problema? ¿Soy capaz de enunciarlo con mis palabras? ¿Puedo dividirlo en pasos? ¿Qué posibles respuestas tiene el problema? |
| Fase de ejecución de las estrategias                          | ¿Soy capaz de realizar los pasos pensados anteriormente? ¿Tengo todas las destrezas?   |
| Fase de revisión de la solución y del proceso                 | ¿Es mi solución coherente y consistente? ¿Es mi proceso riguroso? ¿Puedo resolver el problema de otra forma? ¿Puedo generalizar mi resolución?   |
| Fase de autoanálisis  | ¿Cómo me siento? ¿Qué he aprendido?  |

Estos métodos contribuyen a la mejora de la enseñanza de la resolución de problemas, tomando de cada uno de ellos lo que se adapte a sus necesidades, teniendo en cuenta la participación de los alumnos pues son ellos quienes deben hallar dicha estrategia. Los métodos propuestos se deben aplicar desde la etapa inicial para afrontarlos con naturalidad.

#### 4. 7. ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Las estrategias heurísticas o heurísticos son recursos organizativos del proceso de resolución, que contribuyen especialmente a determinar la vía de solución del problema abordado (Campos, 2019 p.188). Son estrategias de resolución de problemas mediante las cuales el solucionador prueba diferentes enfoques posibles y evalúa el progreso hacia una solución satisfactoria después de cada intento (Poggioli, 2009, p. 25)

Según Castro (1991) se han obtenido diferentes estrategias heurísticas al realizar un análisis de los procesos de resolución de problemas. Algunas de ellas son expuestas por Polya, estas son:

- Heurísticos para representar o comprender el problema: repite el problema con tus propias palabras, identifica los datos, lo que se pide y la información necesaria, busca un modelo, construye una tabla, realiza un dibujo o esquema, etc. (Castro, 1991, p.99). Realizar una representación nos permite organizar la información de forma que emerja de forma más clara en nuestra mente la estrategia a seguir, esto será muy útil en la fase de comprensión del enunciado ya que, si somos capaces de representarlo, es que ha sido entendido. (Carrillo, J. et al. 2016).
- Heurísticos para idear un plan: actúa, conjetura, y prueba, mira hacia atrás, resuelve un problema similar más sencillo, divide el problema en partes, etc. (Castro, 1991, p.99). A mirar hacia atrás Poggioli (2009) lo llama trabajar en sentido inverso. Consiste en resolver el problema partiendo de la meta, transformando esta en datos y llegando al comienzo del problema. Teniendo en cuenta a Salazar (2000), esta estrategia es similar a la que se aplica en la vida diaria, por ejemplo, se pierde un objeto y se trata de recapitular los pasos realizados con el fin de determinar donde se pudo haber perdido el objeto.

En el caso de resolver un problema similar más sencillo Poggioli (2009) lo lleva a cabo simplificando el problema, resolviéndolo con cantidades más pequeñas o replanteándolo más sencillo.

A los anteriores heurísticos Poggioli (2009) añade los siguientes:

- Subir la cuesta: progresa desde la situación actual a otra que esté más próxima a la meta, de manera que, al encontrarse en ese estado más cercano, evalúe el nuevo estado en el que estará después de cada movimiento, pudiendo escoger el que este más próximo a la meta.

- Análisis medios-fin: trabaja en un objetivo a la vez, se descompone la meta en submetas para luego ir solucionándolas una a una, hasta completar la solución final, eliminando los obstáculos.
- Ensayo y error: ensaya una supuesta solución y comprueba si cumple las condiciones del problema; si la comprobación es satisfactoria, habremos resuelto el problema. Si no las cumple variamos la solución propuesta inicialmente y la comprobamos de nuevo y así sucesivamente hasta encontrar la solución (Flores y Rico, 2015)

#### **4. 8. FORMAS DE PROPONER LA INVENCION DE PROBLEMAS**

Nos referimos a estrategias como las diferentes formas de enfrentar a los alumnos a la tarea de inventar problemas. Kilpatrick (1987) presenta una propuesta para inventar problemas utilizando estrategias de asociación, en las cuales los alumnos asocian el problema a situaciones de la vida cotidiana que ya han asimilado, otra estrategia es la de analogía, recordando un problema similar ya resuelto. Estrategias de generalización, buscando un mismo patrón para todos los problemas y por último la estrategia de contradicción, dando lugar a equivoco en el enunciado. Este autor indica que cuando cambia alguna condición expuesta en el problema, o cuando el problema es revisado de diversas formas, se reformula el problema dando lugar a uno nuevo para llegar a la solución.

Brown y Walter (1990) destacan la estrategia de “What if not?” o lo que es lo mismo: “Qué pasaría si”. Utilizándola como objeto de tener un método que permita formular nuevos problemas de forma sistemática. Esta estrategia se ha podido comprobar en estudios posteriores de invención de problemas, como es el caso de English (1997) quien presenta un análisis de los procesos llevados a cabo por alumnos menores de ocho años, proponiendo problemas en circunstancias que podrían considerarse indistintamente como formales y no formales. Las circunstancias formales son las que se dan dentro de la escuela, cuando llevan a cabo la tarea de invención de problemas. Y las circunstancias no formales se les presentan en su día a día y son capaces por sí mismos de inventar el problema.

La invención de problemas puede clasificarse en función del grado de estructuración de la situación en: situaciones abiertas, semiestructuradas o estructuradas.



En las situaciones abiertas se les pide que generen un problema a partir de una situación real o inventada. Para ello, se les puede proporcionar a los estudiantes anuncios que aparezcan en los periódicos, propaganda de las rebajas de los comercios, o contextos similares (Stoyanova, 1998).

Jiménez et al. (2016) en su artículo se refiere a Castro (2011) quien expone diferentes métodos que utilizan los alumnos para inventar problemas. Algunas veces las actividades se pueden iniciar partiendo de problemas ya dados a los cuales deberán cambiar las condiciones, el ámbito, la estructura, etc. Sin embargo, en otras situaciones la tarea de inventar problemas se puede presentar a partir de situaciones de la vida cotidiana, historias, operaciones o con pautas marcadas.

Castro (2011) cita a Stoyanova (1998) quien clasifica las estrategias en función de diferentes situaciones, teniendo en cuenta si son libres, semi-estructuradas o estructuradas. En las situaciones libres los alumnos pueden formular sus problemas sin ninguna pauta asignada; en las semi-estructuradas tienen que inventarse los problemas siguiendo alguna idea expuesta; y finalmente en situaciones estructuradas los alumnos tendrán que reformular alguna característica de un problema ya dado.

Según las aportaciones de Silver (1994) y Stoyanova (1998) podemos observar una clasificación más amplia siguiendo el criterio de la información que se le da para llevar a cabo la tarea. Esta clasificación añade a la anterior que el alumno sea capaz de inventar un problema que se pueda resolver mediante un cálculo dado y que invente un problema partiendo de la respuesta dada.

Por su parte, Santos, (2001) expone cuatro estrategias que servirán al maestro como iniciativa para que sus alumnos lleven a cabo la invención de problemas. Dichas estrategias son:

- Espontánea, la cual surge de una situación significativa para los alumnos, a partir de esta comenzarán un debate que conllevará a un proceso de problematización.
- De tema generativo, cuando los alumnos eligen el tema e investigan los datos.
- De incentivo, en esta el maestro es quien elige el tema matemático para el debate. El objetivo es que los alumnos propongan interrogantes vinculados con el tema.
- De analogía, inventando problemas semejantes a partir de uno ya conocido.

Además de estas estrategias, los conocimientos previos de los alumnos también pueden influir. Es por esto que Leung (1994) indica que puede existir una influencia de los conocimientos matemáticos a la hora de inventar problemas, debido a que en diferentes estudios ha podido demostrar diferencias entre aquellos que tienen un alto y bajo nivel de conocimientos matemáticos. En el caso de alumnos con altos conocimientos parten de la solución para llevar a cabo el proceso de invención, mientras que los alumnos con bajos conocimientos consiguen inventar problemas que podrían no tener solución.

Todo ello nos lleva a concluir que hay multitud de formas para inventar un problema y cada una de estas se podrá expresar mediante un proceso basado en diferentes matices e informaciones (Christou et al., 2005).

#### **4. 9. APORTES DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

La resolución de problemas es uno de los objetivos fundamentales de la enseñanza de las matemáticas, considerándose útil por tres motivos. En primer lugar, porque se resuelven diversos problemas matemáticos en la vida diaria; en segundo lugar, porque la experiencia adquirida en la resolución de problemas matemáticos es aplicable para la resolución de otros problemas; y en tercer lugar porque la resolución de problemas es un proceso de razonamiento que ayuda a pensar mejor (Castro, 2001, p.98).

Otras aportaciones, recogidas en el Manual de Evaluación por Competencias AIEP (2020), son conseguir un aprendizaje significativo. El alumno para resolver un problema debe relacionarlo con sus conocimientos previos, pero a su vez debe incorporar modelos y experiencias nuevas. Además, el alumno dará un significado propio a este aprendizaje haciendo que sea persistente en el tiempo.

Dicha resolución, permite que los docentes planifiquen diversas tareas sobre cualquier aspecto, desde diferentes enfoques y contextos, es decir, es muy versátil. Tal es así, que admite ajustar la complejidad de las tareas a las edades, grado de desarrollo e intereses de los niños.

La resolución de problemas matemáticos se asienta sobre la importancia del aprendizaje activo, es decir, proporcionar a los estudiantes diferentes herramientas y que a partir de estas ellos sean capaces de resolverlo por sí mismos. Esto potencia la autonomía e independencia de los alumnos, pues ante un problema deberán tomar decisiones, detectar los objetivos, la necesidad de resolverlo, la capacidad de análisis...

Si se propone la resolución, planteándolo como un reto desde la práctica, llevará a los alumnos a tener curiosidad, a marcarse metas y a crear expectativas para resolverlo, lo cual hará que sea más ameno y motivador. Los alumnos al estar motivados y animados tendrán una meta específica; conocer la solución del problema.

De manera destacada, la resolución de problemas contribuye a que el alumno esté preparado para detectar, analizar y resolver problemas en diferentes situaciones y contextos del día a día, por lo que les prepara para el futuro.

La resolución de problemas, según Salas (2013), conlleva al alumno a tener un pensamiento más flexible, por ejemplo, que conozca que cada persona puede tener un pensamiento de la realidad. En cuanto a la memoria, la resolución de problemas aumenta su capacidad haciendo que los alumnos perfeccionen su funcionamiento. De la misma manera ocurre con la capacidad de atención.

Además, los alumnos adquieren más vocabulario, lo que contribuye a aumentar la socialización.

Otros aspectos positivos de la resolución de problemas según Ayllón et al. (2016) son que los alumnos trabajan habilidades como el pensamiento crítico, la lógica, el razonamiento, la imaginación y la creatividad.

#### **4. 10. ASPECTOS POSITIVOS DE LA INVENCION DE PROBLEMAS.**

Según Castro (2011), son varios estudios los que abalan que la tarea de inventar problemas aporta beneficios para la educación matemática. Uno de estos beneficios se refiere al aumento del conocimiento matemático, ya que dicha tarea exige establecer conexiones entre los distintos conocimientos que se tienen de manera separada, así como realizar una serie de acciones propias del aprendizaje. Al inventar un problema se ponen en marcha diversas habilidades como comprender, analizar, indagar, seleccionar, examinar datos y manejar diversas estrategias de solución; que permitirá al estudiante apropiarse del conocimiento. Han de leer y examinan datos, pensar críticamente, discutir ideas, estrategias y soluciones a la vez que las cuestionan. Con frecuencia han de generalizar y es necesario escribir con claridad, exactitud y organización como exponen Burçin (2005), Polya (1945) y Wright y Stevens (1980), citados por Castro (2011).

Esta misma autora destaca que los estudiantes han de adelantarse a la solución del problema y si éstos no se reducen a meros ejercicios de aplicación, requerirán relacionar conceptos para poder llegar a la solución del problema planteado lo que les puede ayudar

a incrementar su habilidad para aplicar los conceptos matemáticos y aprender a utilizar variedad de estrategias para llegar a la solución de los problemas.

Otro beneficio se refiere a la motivación siendo considerada esencial en la enseñanza, ya que representa un factor determinante en el aprendizaje del alumno sobre las matemáticas. Una buena motivación dará lugar a incrementar el rendimiento de los estudiantes, permitiéndoles obtener mejores logros académicos. Algunos autores como English (1997) o Silver (1994) proponen como instrumento de motivación la invención de problemas, que hará que el sujeto tenga una actitud positiva en clase de matemáticas, ya que como indica Polya (1965) el trabajo con problemas, tanto en invención como en resolución, ayuda a despertar curiosidad y motivación en el alumno.

Un siguiente beneficio sería la disminución de la ansiedad de los estudiantes en relación con las matemáticas. Inventar fomenta una mejor disposición, disminuyendo el miedo y la inquietud, genera confianza y disminuye frustraciones que se presentan al resolver problemas (Ayllón et al., 2016). Cuando la tarea de formular problemas fomente una disposición más favorable y responsable hacia las matemáticas contribuirá a rebajar la ansiedad de los estudiantes hacia las mismas. Los autores Brown y Walter (1990), Burçin (2005), English (1997), Moses, Bjork y Goldenberg (1990), Silver (1994) y Song, Yim, Shin, y Lee (2007), a los que se refiere Castro (2011) manifiestan que la invención de problemas reduce el miedo y preocupación por las matemáticas que en muchos casos padecen los alumnos.

Otro de los beneficios es la mejora de los errores matemáticos habituales que cometen los estudiantes. Brown y Walter (1990) argumentan que esta actuación induce al alumno a elegir la información que ha de utilizar y a seleccionar los datos con los que ha de operar, haciendo que los errores resolutivos disminuyan. La invención ayuda a una mejor comprensión y análisis de la información.

El aumento de la creatividad es otro de los beneficios pues, inventar está relacionado directamente con el nivel de creatividad y la competencia matemática (Espinosa et al., 2014). Sin duda alguna, la creatividad y la invención están íntimamente relacionadas, debido a que al crear problemas se pone de manifiesto la originalidad de los estudiantes. Silver (1994) estudia la creatividad de los estudiantes, mide la fluidez de acuerdo al número de problemas generados y la flexibilidad de acuerdo al número de categorías. El grado de originalidad de acuerdo con el número de soluciones tiene una

relación directa entre la habilidad para proponer problemas y el grado de creatividad de los estudiantes.

También aporta beneficios como herramienta evaluadora para el docente. A través de la invención el docente puede evaluar el conocimiento, razonamiento, desarrollo conceptual y pensamiento (Ayllón et al., 2016). El inventar problemas permitirá que el estudiante demuestre habilidades adquiridas, sirviendo al docente como competencia a evaluar. En particular Ellerton (1986) determina en sus trabajos que los alumnos con talento matemático son buenos proponiendo problemas. Por lo tanto, esta tarea promueve el desarrollo de capacidades y habilidades matemáticas tal como lo afirma Ayllón et al. (2016) concluyendo que el crear y resolver situaciones problemáticas se convierten en labores esenciales para el desarrollo eficiente del pensamiento matemático, pues al crear problemas y resolverlos se somete a prueba la capacidad de razonar e imaginar.

De acuerdo con lo investigado, es necesario que se tengan en cuenta en la enseñanza, por ello es preciso que el docente desarrolle estrategias y metodologías que promuevan la invención de problemas matemáticos. Al respecto Malaspina, (2016) menciona que la creación de problemas debe ser indispensable en el proceso de aprendizaje de la matemática y debe darse en todos los niveles educativos.

#### **4. 11. EXPERIENCIAS DE INVENCION DE PROBLEMAS EN EL AULA**

En este apartado vamos a centrarnos en tres artículos que describen estudios sobre cómo son los problemas que inventan los alumnos de primaria.

Uno de los artículos es realizado por Cázares et al. (1998). En este nos muestra la investigación realizada a un grupo de 14 alumnos de entre 6 y 13 años pertenecientes a la etapa de primaria. Estos autores tienen el propósito de estudiar los procesos de invención de problemas aritméticos verbales. A estos alumnos se les pasó un cuestionario en el que se les invitaba a inventar un enunciado de un problema basándose en una situación de compraventa, dándoles diferentes ilustraciones con datos numéricos. Sólo podían elegir para la realización 4 tarjetas de las 11 dadas y a partir de ellas inventar dicho problema. Como resultado se obtuvieron 56 problemas diferentes que analizan según cinco valores distintos, de menor a mayor dominio. Estos son:

- 1) Coherencia global del enunciado del problema, 2) estructura semántica del problema, 3) uso de los datos numéricos que aparecen en la imagen, 4) coherencia

de las operaciones con la estructura del problema y 5) justificación sobre la validez del procedimiento de resolución. (Cázares et al. p.26. 1998)

En este estudio observan que cuanta más edad y escolarización tienen los niños, mayor competencia aritmética tienen para inventar problemas.

En el segundo artículo considerado Ayllón et al. (2008) describe los tipos de problemas que inventan los niños según su edad, primero se puso a los niños por parejas, dándoles unas tarjetas en las que aparecían productos con sus precios, cada niño debía de inventar un problema y resolver el de su compañero.:

- Los de primer curso: plantean problemas cuyo enunciado no es un problema matemático ya que escasean de los requisitos necesarios para clasificarlos como tal. Además, en este análisis se puede observar como no hay ningún enunciado con datos conocidos para conseguir la solución. Una característica común es que los enunciados inventados exponen una pregunta que no es posible contestar. Solo sería contestada de manera correcta quienes adivinasen el propósito de quien lo inventó. Un ejemplo de este tipo de problemas es el siguiente ¿Cuántos bombones hay en la caja?. En este caso la respuesta que da la compañera que resuelve el problema es una invención puesto que no tiene datos para conocerlo. Se trata de una adivinanza, la respuesta solo será correcta si coincide con lo que la inventora tenía pensado.
- Los de cuarto curso: plantean problemas con un enunciado compuesto por elementos necesarios en cuanto a coherencia, estructura, datos conocidos y desconocidos y el objetivo a alcanzar, por lo que se pueden considerar problemas matemáticos. En este caso las respuestas obtenidas son correctas, aunque a veces pueden presentar alguna duda para quien lo resuelve. Un ejemplo de este tipo de problemas sería: En un zoo hay 120 patas. ¿Cuántas jirafas hay? ¿Cuántas avestruces? Una respuesta posible es que haya 30 jirafas y ningún avestruz. En este caso quien lo resuelve considera que todos los animales que hay tienen 4 patas y por eso no señala que haya avestruces. Esta respuesta coincide con la que daría el inventor del problema.
- Los de quinto curso: plantean problemas cuyos enunciados corresponden a problemas matemáticos de tipo aritmético. Estos problemas son correctos y tienen un nivel de dificultad mucho mayor que los de los cursos anterior ya

que los enunciados están compuestos por una única pregunta a la que se ha de contestar mediante la realización de una operación aritmética.

El tercer artículo es el expuesto por Ayllón et al. (2011) en el cual se realiza un análisis para conocer como los alumnos inventan problemas. Este artículo parte de la idea de que los alumnos de primaria inventarán problemas de diferente complejidad en función de las instrucciones que reciban. Partiendo de este dato este artículo se centra en el análisis de las características de los enunciados pudiendo observar la diferencia de edad. Para ello estos autores llevaron a cabo dos estudios complementarios, ambos fueron realizados a niños de Educación Primaria, escolarizados en centros concertados y con niveles socioculturales distintos. Concretamente participaron 27 alumnos del mismo curso agrupados en parejas.

La prueba consistió en realizar entrevistas divididas en tres partes; la primera de ellas constaba de cuestiones sobre cómo los alumnos perciben los problemas y como suelen resolverlos; la segunda consistía en inventar un problema difícil de resolver para el compañero y viceversa; y la tercera consistía en la clasificación de un problema en fácil o difícil exponiendo cuales son los elementos que hacen que un problema sea difícil para ellos.

Como resultado los autores señalan que los alumnos de 2º y 3º de Primaria inventan problemas que implican una estructura aditiva. Los problemas que incluyen estructuras multiplicativas son inventados por los alumnos de 4º de Primaria. Se puede concluir, que cada alumno inventa problemas en función de lo que se esté trabajando en el aula. Además, cuanto mayores son los alumnos más sofisticados son los enunciados que inventan, pues para resolver los problemas hay que seguir distintos pasos encadenados.

Se han podido observar tres experiencias distintas que analizan como los alumnos inventa problemas desde diferentes criterios. A pesar de trabajarlos de diferente manera podemos concluir que cuanto más pequeños son los alumnos menos complejos son los enunciados que inventan, y que cuanto más mayores más complejos. También podemos extraer la conclusión de que los problemas están basados en experiencias matemáticas vividas en su día a día.

#### **4. 12. EXPERIENCIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL AULA**



Para describir las diferentes estrategias que emplean los niños de Educación primaria en la tarea de resolver problemas, tenemos que partir de las investigaciones realizadas por Carpenter et al. citado en Rizo et al. (1999).

Partimos de una investigación realizada a 198 niños con el objetivo de conocer algunas de las estrategias que emplean los niños para resolver problemas, partiendo de que muchas de ellas se consiguen de manera espontánea. Se puede observar dos distintos tipos de estrategias: irreflexiva y reflexiva. La irreflexiva no pasa un análisis previo, es decir, parte de factores externos, las tienen automatizadas. Por el contrario, cuando se requiere un análisis previo, con ayuda del profesor se denomina estrategia reflexiva.

Para clarificar las estrategias que utilizan los niños vamos a dividir las según los tipos de problemas previamente explicados; es decir: aditivos y multiplicativos. Empezando por los aditivos en la investigación que realiza Rizo et al (1999) se exponen estrategias como:

- Conteo directo de un modelo dado: consiste en que el alumno analice el enunciado que le dan y sobre él opere mediante el conteo. Una manera de operar a estas edades es utilizando los dedos. Según Carpenter et al (1982), el niño representa las cantidades de la operación dada con los dedos para posteriormente encontrar el resultado, es decir añadir hasta. A través de este proceso, el niño irá extendiendo los dedos de la mano uno a uno. Posteriormente, los cuenta en el mismo orden y, finalmente, conseguirá decir el total. En el caso de la sustracción, los alumnos llegan a conocer el resultado a través de procedimientos de separación. En un conjunto dado separa el número de elementos menor. Luego, cuenta los restantes y así conoce el resultado.

También podemos señalar la estrategia de ensayo-error en la cual se forma un conjunto utilizando diferentes objetos.

- Conteo sin modelo previo: se inicia con el uno hasta llegar a encontrar la respuesta, pero en este caso sin utilizar los dedos u objetos para su representación (Rizo et al 1999). Además, este autor señala que según Bermejo y Rodríguez (1993) existen varios niveles: contar todo sin modelo; contar a partir del primer sumando mentalmente; contar a partir del sumando



mayor; contar hacia atrás desde la cantidad más grande; contar hacia delante/atrás hasta otra cantidad y contar a partir de lo dado.

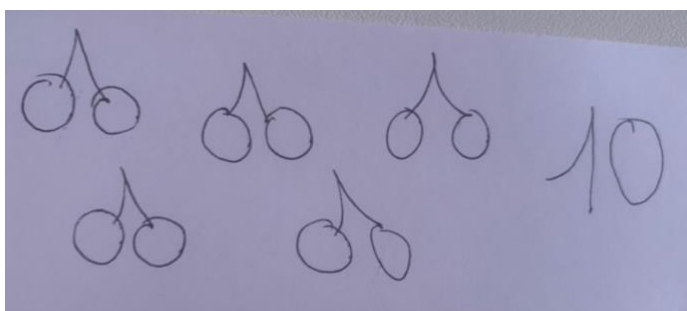
- Opera con los datos de manera irreflexiva: esta estrategia tiene varias manifestaciones. La más frecuente es formar nuevos números a partir de los que se exponen en el enunciado y operar con ellos. Tiende a ser utilizada en problemas aditivos.
- Hechos numéricos: pueden ser de dos tipos: conocidos y derivados. Conocidos son aquellos de los que recuerdan el resultado y derivados cuando se llega a conocer el resultado por procedimientos de composición y descomposición (Díaz y Bermejo, 2007).

Una vez analizadas las estrategias aditivas, se procede a recoger las estrategias multiplicativas. Según Ivars et al. (2015) son:

- Modelización: dicha estrategia se utilizaba de tres maneras distintas en función del tipo de problemas: agrupamiento, reparto o medida. En la primera de ellas forman grupos con igual número de elementos y después cuentan el total de los elementos que han dibujado. A modo de ejemplo se muestra la imagen 5 en la que se ha resuelto el siguiente problema Elisa tiene 5 racimos de cerezas. Cada racimo tiene dos cerezas. ¿Cuántas hay en total?

### Imagen 5

*Ejemplo de resolución de un problema mediante la estrategia de modelización por agrupamiento*



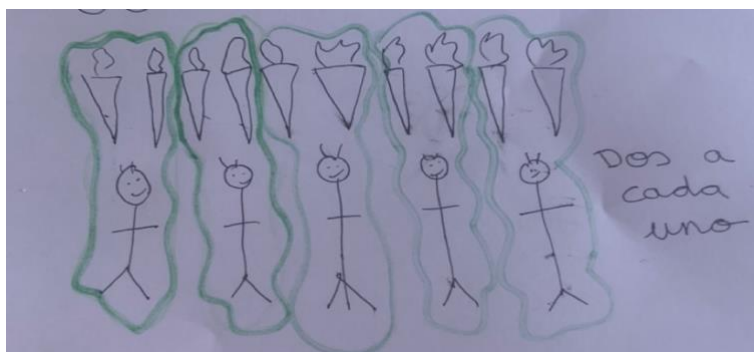
*Nota.* Elaboración propia.

Otra manera sería mediante reparto; el alumno a través de la modelización va repartiendo los elementos que tiene en grupos y posteriormente cuenta los elementos de cada grupo. Para ello reparten la cantidad hasta que no quedan elementos que repartir, encontrando la respuesta. En la imagen 6 se muestra un

ejemplo de esta estrategia para resolver el problema siguiente: Marta celebra su cumpleaños e invita a 5 amigos. Tienen 10 bolsas de golosinas. ¿Cuántas bolsas le pertenece a cada uno? (Ver imagen 6).

### Imagen 6

*Ejemplo de resolución de un problema mediante la estrategia de modelización mediante reparto*



*Nota.* Elaboración propia.

Otra manera sería mediante medida; los alumnos dibujan el total de elementos y los agrupan en partes iguales para conocer la respuesta. En la imagen 7 se ilustra el uso de esta estrategia para resolver el siguiente problema: Carla tiene 12 helados. Reparte tres helados a cada hermana. ¿Cuántas hermanas tiene?

### Imagen 7

*Ejemplo de resolución de un problema mediante la estrategia de modelización mediante medida*



*Nota.* Elaboración propia.

- **Conteo:** Se distinguen dos tipos; a saltos y por ensayo-error. En el conteo a saltos los alumnos llegan a conocer la solución contando el número de agrupaciones realizadas como resultado de los saltos dados.  
Por otro lado, en el conteo por ensayo error se representan tantos grupos como el enunciado indica probando con un número al azar cada vez, hasta que el conteo

coincide con el número total de objetos dando respuesta al problema. Para ello los alumnos suelen apoyarse de los dedos u objetos.

- Hechos numéricos: estas estrategias están asociadas al uso de tablas de multiplicar. Para ello, el alumno emplea algún algoritmo o procedimiento de cálculo para encontrar la respuesta correcta.

Estas estrategias están ordenadas según la evolución de los niños en el manejo de las matemáticas. Además, se puede comprobar que la estrategia que utiliza el niño está relacionada con el lugar en el que se presenta la incógnita y el tipo de operación a realizar, como señala Carpenter et al. (1996) según Díaz et al. (2007).

#### **4. 13. DIFICULTADES DE LA RESOLUCIÓN E INVENCION DE PROBLEMAS**

Son algunas las dificultades que se les presentan a los alumnos a la hora de llevar a cabo la tarea de la resolución e invención de problemas. A continuación, describimos algunas de ellas.

Son varios los autores que han identificado en sus estudios algunas dificultades. uno de ellos Kosci (1974) se centra en la dificultad de la discalculia, siendo esta una disfunción de ciertas partes del cerebro que se ocupa del razonamiento lógico y que ocasiona dificultades en el aprendizaje matemático. Existen diferentes tipos:

- Verbal: dificultad para nombrar términos matemáticos.
- Léxica: dificultad para leer símbolos matemáticos.
- Gráfica: dificultad para escribir números y símbolos
- Operacional: dificultad para realizar operaciones aritméticas.
- Ideognóstica: dificultad en la comprensión de las relaciones necesarias para llevar a cabo los cálculos mentales.

Además de los problemas de origen interno, se dan problemas externos, son Carpenter y Moser (1982) los que explican que según se analice el enunciado pueden encontrar mayor o menor dificultad, pues si la incógnita que se busca coincide con el resultado del problema suele serles más fácil, pero si dicha incógnita se encuentra en el segundo o primer término el problema les resultará más difícil.

Puig y Cerdán (1988) exponen que la dificultad se localiza en la manera que están presentadas las cantidades, en la posición que se encuentre la pregunta en el enunciado, en el orden de presentación de la información o en el tamaño de los números, pues esto perjudica a la comprensión del mismo.

En ocasiones el alumno tiene dificultades para comprender los enunciados de los problemas matemáticos debido a un deficiente conocimiento lingüístico y semántico (Mayer, 1998).

Juidías y Rodríguez (2007) destacan que es fundamental una buena comprensión lectora dado que si los enunciados son de gran dificultad en cuanto a conocimientos lingüísticos y semánticos les costará comprender el enunciado.

En cuanto a la estructura semántica de los problemas, considerando tipos de problemas explicados anteriormente, son diversos los autores que concuerdan en que los problemas que presentan menor dificultad son los de cambio, seguidamente los de combinación, igualación y, por último, los de comparación. Bermejo (2004) muestra en su libro los errores más observados en la resolución de problemas identificando algunas de las dificultades de las que proceden En concreto señala:

- Repetición de una de las cantidades dada en el problema, debido a la falta de comprensión entre alguna de las partes y el todo.
- Falta de comprensión de las palabras clave que presenta el problema “más que”, “menos que” que ayudan a la decisión de que operación realizar sin un razonamiento previo.
- Falta de comprensión del enunciado dando lugar a que el alumno cometa el error de transformar el problema en otro de más fácil solución. Otro error que el alumno puede cometer es cambiar de lugar la incógnita.
- Cuando el alumno se encuentra bloqueado en la resolución del problema suele cometer el error de inventarse la respuesta.

## 5. CONCLUSIONES

Para concluir, destaco que el tema que he elegido, basado en el análisis de diferentes aspectos de la resolución e invención de problemas, es fruto de la necesidad de ampliar la formación en Educación Matemática que nos aporta las asignaturas del Grado de Educación Primaria en una dimensión tan común y relevante en las aulas, como es los problemas matemáticos. A su vez, se considera que es un tema muy relacionado con la actualidad educativa, pues se están investigando diferentes métodos para poner en práctica las matemáticas en la escuela de manera más dinámica.

Debido a esto, a partir de este trabajo he pretendido hacer un análisis teórico para tener una formación adecuada fundamentada en autores especialistas en la resolución e

invención de problemas. Con este análisis se ha podido conocer diferentes estrategias para inventar y resolver problemas matemáticos, las más destacadas las heurísticas. Estas estrategias muestran diferentes pautas a seguir que permiten a los alumnos alcanzar un buen nivel para ser capaces de formular y llegar a conocer la solución de problemas en base a los aspectos trabajados en el aula. También las dificultades que pueden darse a la hora de poner en práctica la invención y resolución de problemas, no solo a nivel numérico si no también semántico. Todo esto se ha podido observar mediante la realización de análisis por diferentes autores los cuales han llevado a cabo experiencias en las aulas, considerando que si los maestros ponen en práctica estas estrategias en función al tipo de problema al que los alumnos se enfrentan, estos estarán motivados, tendrán una visión positiva de las matemáticas y contribuirá a conseguir algún aspecto positivo de lo que se ha expuesto a lo largo del trabajo.

En cuanto al grado de consecución de los objetivos propuestos, se extraen las siguientes conclusiones.

Con respecto al objetivo principal “analizar las particularidades de la resolución e invención de problemas para ponerlo en práctica el aula” considero que se ha alcanzado, pero no por completo, ya que se puede seguir analizando documentos e investigando, pues he tenido que sintetizar mucha información.

En cuanto a los objetivos específicos considero que se han conseguido en gran parte, aunque al igual que pasa con el objetivo principal, al ser aspectos teóricos se puede seguir ampliando información e investigando sobre las aportaciones de distintos autores o en diferentes países. Se ha conseguido identificar varios tipos de problemas, estrategias y métodos para identificar cómo los niños resuelven o inventan problemas. También se ha conseguido indagar en los beneficios o aspectos positivos, así como las dificultades que suelen tener los alumnos cuando se enfrentan a estas tareas.

Cabe destacar que mucha información ha sido compleja de extraer, pues el tema que he escogido ha sido investigado por muchos autores, pero muchos de ellos se refieren a esta temática en inglés.

A pesar de ello, este trabajo de fin de grado me ha permitido analizar, comprender, comparar y estudiar múltiples modelos, estrategias, experiencias, profundizando en la etapa de Educación Primaria. Todo esto ha hecho que tenga una visión más profunda y amplia de la resolución e invención de problemas, permitiéndome que tenga más recursos

para poner en práctica como futura docente, con la intención de que los alumnos tengan una visión más positiva de las matemáticas y mejoren su aprendizaje.

Para finalizar, este trabajo no me ha sido fácil, pero si satisfactorio, ya que he afrontado situaciones difíciles y complejas creciendo como docente. Una vez finalizado, puedo decir que comparando mis conocimientos previos con los actuales he conseguido que estos sean más significativos y que, como ya he señalado anteriormente, los pueda llevar a cabo en el aula mejorando la calidad educativa de las matemáticas.

## 6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AIEP (2020), Manual de evaluación de aprendizajes por competencias. AIEP, Universidad Andrés Bello. <https://docentes.aiep.cl/media/1600/manual-de-evaluación-de-aprendizajes-por-competencias.pdf>
- Ayllón Blanco, M.F., Castro, E., y Molina, M. (2008). Invención de problemas por alumnos de educación primaria. En M, Molina, P, Pérez-Tyteca, M.A, Fresno. (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas: competencias matemáticas* (pp.225-234). Granada: S.A.E.M. Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada
- Ayllón Blanco, M. F., Castro, E., y Molina, M. (2011). Invención de problemas y tipificación de problema "difícil" por alumnos de educación primaria. En M, Marín, J, Fernández, L.J, Blanco, y M.M Palarea. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 277-286). SEIEM.
- Ayllón Blanco, M.F., Gallego Ortega, J.L., y Gómez Pérez, I.A. (2016). La actuación de estudiantes de educación primaria en un proceso de invención de problemas. *Perfiles educativos*, 38(152), 51-67. [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0185-26982016000200051&lng=es&tlng=es](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0185-26982016000200051&lng=es&tlng=es).
- Ayllón Blanco, M. F., Gómez Pérez, I. A., y Ballesta-Claver, J. (2016). Pensamiento matemático y creatividad a través de la invención y resolución de problemas matemáticos. *Propósitos y Representaciones*, 4(1), 169–193. <http://revistas.usil.edu.pe/index.php/pyr/article/view/89>
- Blanco Nieto, J., Cárdenas Lizarazo, J., y Caballero Carrasco, A. (2015). *La resolución de problemas de matemáticas en la formación inicial de profesores de Primaria*. Universidad de Extremadura.
- Blum, W y Niss, M. (1991). Resolución de problemas matemáticos aplicados, modelado, aplicaciones y vínculos con otras materias: estado, tendencias y problemas en la instrucción de las matemáticas. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37–68 <https://doi.org/10.1007/BF00302716>
- Brown, S.I y Walter, I. (1990). *The art of problem posing*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Campos Acosta, I. (2019). El empleo de los procedimientos heurísticos en la resolución de ejercicios geométricos. *Revista boletín Redipe*, 8(5), 185-193.



- Carpenter, T.P y Moser, J.M. (1982). *The development of addition and subtraction problem-solving skills*. Routledge.
- Carpenter, T. P. (1986). Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge: implications from research on the initial learning of arithmetic. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 113-132). Lawrence Erlbaum Associates.
- Carrillo Yañez, J., Contreras González, L., Climent Rodríguez, N., Montes Navarro, M.A., Escudero Ávila, D.I., Flores Medrano, E. (2016). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros de Educación Primaria*. Madrid: Paraninfo.
- Castro, E. (1991). *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa*. Granada: Universidad de Granada.
- Castro, E. (2001). *Didáctica de la matemática en educación primaria*. Síntesis, S.A.
- Castro, Enc. (2011). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática*. (pp. 1-15). Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Cázares, J., Castro, Enc., y Rico, L. (1988). La invención de problemas en escolares de primaria: un estudio evolutivo. *Revista de pedagogía de la universidad de Salamanca*, 10, 19-39.  
[https://www.researchgate.net/publication/41207950\\_La\\_invencion\\_de\\_problemas\\_en\\_escolares\\_de Primaria\\_Un\\_estudio\\_evolutivo](https://www.researchgate.net/publication/41207950_La_invencion_de_problemas_en_escolares_de Primaria_Un_estudio_evolutivo)
- Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra e I. Sais (Eds.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 51- 64). Paidós.
- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. y Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM*, 37(3), 149-158.
- Decreto 26/2016, de 21 de julio, por el que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León. *Boletín Oficial del Estado*, 142, de 25 de julio de 2016, 3418-34746. <https://www.educa.jcyl.es/es/resumenbocyl/decreto-26-2016-21-julio-establece-curriculo-regula-implant>



- Díaz, J.J. y Bermejo, V. (2008). Nivel de abstracción de los problemas aritméticos en alumnos urbanos y rurales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME*, 10(3),335-364.
- Echenique, I. (2006). *Matemáticas resolución de problemas*. Educación Primaria. Departamento de educación. <https://www.orientacionandujar.es/wp-content/uploads/2014/12/RESOLUCI%C3%93N-DE-PROBLEMAS-PRIMARIA-ISABEL-ECHENIQUE.pdf>
- Ellerton, N. F. (1986). Children's made up mathematics problems- A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 261-271.
- English, L. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 183-217.
- Espinoza, J., Lupiañez, J. L. y Segovia, I. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 14(2), 2-8.
- Fernández, J.A. (2000). *Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos*. Ciss Praxis.
- Fernández, J.A. (2006). Algo sobre resolución de problemas matemáticos en educación primaria. *Revista Sigma*, 29, 29-42. <http://www.grupomayeutica.com/documentos/21.%20ALGO%20SOBRE%20RESOLUCI%C3%93N%20DE%20PROBLEMAS%20MATEMATICOS.pdf>
- Flores, P. y Rico, L. (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Editorial Pirámide.
- García, J. (2002). Resolución de problemas y desarrollo de capacidades. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 29, 20-38. [http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1010-29142011000200009&lng=es&nrm=iso](http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1010-29142011000200009&lng=es&nrm=iso)
- Ivars, P. y Fernández, C. (2015). Evolución de las estrategias en la resolución de problemas de estructura multiplicativa en Educación Primaria. En P. Sánchez (Ed.), *17 Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 1-14). Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia, SEMRM.

- Juidías Barroso, J. y Rodríguez Ortiz, I. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de educación*, 342, 257-286.
- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Kosc, L. (1974). Developmental dyscalculia. *Journal of learning disabilities*, 7(3), 164-177.
- Lavy, I. y Bershadsky, I. (2003). Problem Posing via “What if not?” strategy in solid geometry: A case study. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(4), 369-387.
- Leung, S.S. (1994) The relation of mathematical knowledge and creative thinking to the mathematical problem posing of prospective elementary school teachers on tasks differing in numerical information content. [Tesis doctoral University of Pittsburgh]
- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín Oficial del Estado, 106, de 4 de mayo de 2006, 2996-78. <https://www.boe.es/buscar/pdf/2006/BOE-A-2006-7899-consolidado.pdf>
- Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, que modifica la Ley Orgánica 2/2006 del 3 de mayo de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, 340, de 30 de diciembre de 2020, 122868-122953. <https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3>
- Malaspina, U. (2016). *Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Cuadernos, 15, 321-331.
- Mayer, R. E. (1998). Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving. *Instructional science*, 26(1), 49-63.
- Moliner, M. (1986). *Diccionario de uso del Español*. Madrid: Gredos.
- Moses, B. M., Bjork, E., y Goldenberg, E. P. (1993). Beyond problem solving: Problem posing. *Problem posing: Reflections and applications*, 178-188.
- Pérez Ortiz, P. (2009). Problemas y ejercicios en matemáticas. *Revista Digital Innovación y experiencias educativas*, 15, 1-9. [https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero\\_15/PATRICIA\\_PEREZ\\_1.pdf](https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_15/PATRICIA_PEREZ_1.pdf)

- Poggioli, L. (1999). *Estrategias de resolución de problemas*. Serie enseñando a aprender. Caracas, Fundación Polar.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.
- Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, 52, 1 de marzo de 2014, 2014-2222. <https://www.boe.es/buscar/pdf/2014/BOE-A-2014-2222-consolidado.pdf>
- Rizo Cabrera, C. y Campistrous Pérez, L. (1999) Estrategias de resolución de problemas en la escuela. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática educativa-RELIME*, 2(2-3), 31-45.
- Ruiz, D. y García, M. (2003). El lenguaje como mediador en el aprendizaje de la aritmética en la primera etapa de Educación Básica. *La Revista Venezolana de Educación*, 23(7), 321-327.
- Salas Fortià, A. (2013). *Trabajar los problemas matemáticos mediante materiales lúdico-manipulativos en segundo ciclo de primaria*. [Trabajo de fin de grado Universidad internacional de la Rioja] [https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/1907/2013\\_07\\_24\\_TFG\\_ESTUDIO\\_DEL\\_TRABAJO.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/1907/2013_07_24_TFG_ESTUDIO_DEL_TRABAJO.pdf?sequence=1&isAllowed=y).
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, Florida: Academic Press.
- Schoenfeld, A. (1994). *Mathematical thinking and problem solving*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Segovia, I. y Rico, L. (2011). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Editorial Pirámide.
- Silver, E. A. (1994) On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28.
- Stoyanova, E. (1998). *Extending and exploring learners' problem solving via problem posing: A study of years 8 and 9 learners involved in mathematics challenge and enrichment stages of Euler Enrichment program for young Australians*. [Tesis doctoral, Universidad de Edith Cowan] <https://ro.ecu.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?referer=https://www.google.com/&httpsredir=1&article=1886&context=theses>

Vila, A y Callejo, M. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas*. Narcea